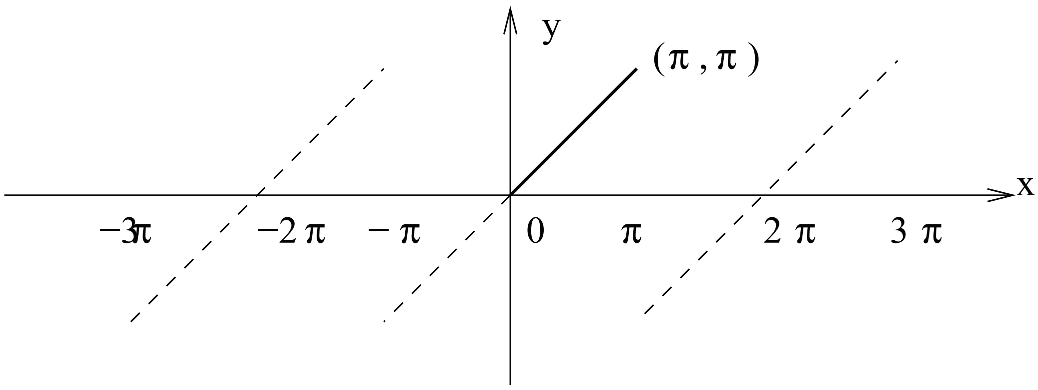

Sekil 9. 4

Bu fonksiyon için $a_n(\bar{f}\ ) = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ \ b_n(\bar{f}\ ) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x.\sin nx\, dx =$ $(-1)^{n-1}\frac{2}{n},\ n = 1, 2, \ldots$ bulunur. Demek ki, $x \in [0, \pi]$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx$$

dır. $x = \frac{\pi}{2}$ özel durumda, buradan

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

olduğu elde edilir. ⋄

9.7 Çözümlü Problemler

(1) Aşagıdaki fonksiyon dizilerin yanlarında yazılı aralıklarda noktasal yakınsadığı fonksiyonları bulunuz.

(a) $f_n(x) = (x-1)\arctan(x^n), \quad E = [0, +\infty);$

(b) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}, \quad E = [0, 2];$

(c) $f_n(x) = n^3x^2e^{-nx}, \quad E = [0, +\infty);$

(d) $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1), \quad E = [1, 3];$

(e) $f_n(x) = n(x^{1/n} - x^{1/2n}), \quad E = [0, +\infty).$

Çözüm: (a) $\forall n \in \mathbf{N}$ için $f_n(0) = (-1)\arctan 0 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 0 \arctan 1 = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$ olur. $x \in (0,1)$ olduğunda $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = (x-1)\lim\limits_{n\to\infty} \arctan(x^n) = (x-1).0 = 0$ ve $x \in (1,+\infty)$ olduğunda ise $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = (x-1)\lim\limits_{n\to\infty} \arctan(x^n) = \frac{\pi}{2}(x-1)$ olduğu elde edilir. Demek ki, (f_n) dizisinin $E = [0,+\infty)$ üzerinde noktasal yakınsadığı fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \quad \text{ise}, \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & x \in (1,+\infty) \quad \text{ise} \end{cases}$$

dir.

(b) $x \in [0,1)$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (1+x^n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} [(1+x^n)^{\frac{1}{x^n}}]^{\frac{x^n}{n}} \\ &= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$x = 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 2^0 = 1$ ve $x \in (1,+\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n} = x \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{x^n})^{1/n} = x.e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{nx^n}} = x$ olduğuna göre, (f_n) dizisinın $E = [0,2]$ üzerinde noktasal yakınsadığı foksıyon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \text{ ise}, \\ x, & x \in (1,2] \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

(c) $x = 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ olduğu açıktır. Herbir $a > 0$ sabit sayısı için L'Hospital kuralından $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^3}{e^{at}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{3t^2}{ae^{at}} = \lim\limits_{t\to t\infty} \frac{6t}{a^2e^{at}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{6}{a^3e^{at}} = 0$ olduğuna göre, $x \in (0,+\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x^3x^2e^{-nx} = x^2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{nx}} = x^2.0 = 0$ olduğuna göre, (f_n) dizisinın $E = [0,+\infty)$ üzerinde noktasal yakınsadığı fonksiyon $f : E \to \mathbb{R}, f(x) = 0$ dır.

(d) $x = 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} n.0 = 0$ olduğu açıktır. $x \in (1,3]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{1/n}-1}{1/n} = \ln x$ olduğundan (f_n) dizisinın $E = [1,3]$ üzerinde noktasal yakınsadığı fonksiyon $f : [1,3] \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$

dır.
(e) $x = 1$ için $f_n(1) = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$ dır. $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ için

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - x^{1/2n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{1/n} - 1 + 1 - x^{1/2n}}{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{1/n} - 1}{1/n} - \frac{1}{2} \lim \frac{x^{1/2n} - 1}{1/2n} \\ &= \ln x - \frac{1}{2} \ln x = \frac{1}{2} \ln x\end{aligned}$$

olduğuna göre, (f_n) dizisinın $(0,+\infty)$ üzerinde noktasal yakınsadığı fonksiyon $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} \ln x$dır. $\diamond$

(2) Aşağıda genel terimleri verilen (f_n) dizilerinin yanlarında yazılı aralıklar üzerinde düzgün yakınsak olduklarını gösteriniz.

(a) $f_n(x) = x^{2n}, \quad E = [0,a] \quad (0 < a < 1);$
(b) $f_n(x) = \frac{\sin n\sqrt{x}}{\ln(n+1)}, \quad E = [0,+\infty);$
(c) $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}, \quad E = [1,a] \quad (a > 1);$
(d) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, \quad E = [-1,1];$
(e) $f_n(x) = f_n(x) = n^{3/4}.xe^{-\sqrt{nx}}, \quad E = [0,+\infty).$

Çözüm: (a) $x \in [0,a]$ $(0 < a < 1)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ olduğuna göre, $f_n(x) \underset{[0,a]}{\Rightarrow} f(x) = 0$ dır. $\rho_n = \sup\{\mid f_n(x) - f(x) \mid : x \in [0,a]\} = \sup\{x^{2n} : x \in [0,a]\} = a^{2n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0 \Rightarrow f_n \underset{[0,a]}{\rightrightarrows} f$ olur.
(b) $\forall x \in [0,+\infty)$ için $\mid f_n(x) \mid \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ eşıtsızlığı sağlandığından $x \in [0,+\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ olur. Demek ki,$f_n \underset{[0,+\infty)}{\rightarrow} 0$ dır. $\rho_n = \sup\{\mid \frac{\sin\sqrt{4}x}{\ln(n+1)} \mid : x \in [0,+\infty)\} = \frac{1}{\ln(n+1)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0 \Rightarrow f_n \underset{[0,+\infty)}{\rightrightarrows} 0$ dır.
(c) $x \in [1,a]$ $(a > 1)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx^2}{n+x} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2}{1+\frac{x}{n}} = x^2$ olur. Buna göre, $f_n(x) \to x^2, x \in [1,a]$ olduğu elde edilir. $\rho_n = \sup\{\mid \frac{nx^2}{n+x} - x^2 \mid : x \in [1,a]\} = \sup\{\frac{x^3}{n+x} : x \in [1,a]\} = \frac{a^3}{n+a} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0 \Rightarrow$

$f_n(x) \underset{[0,a]}{\rightrightarrows} x^2$ olduğu anlaşılır.

(d) Her $x \in [-1,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-(x-n)^2} = 0$ olduğu açıktır. Buna göre $f_n(x) \underset{[-1,1]}{\to} 0$ olduğu anlaşılır. $\rho_n = \sup\{e^{-(x-n)^2} : x \in [-1,1]\} = e^{-(n-1)^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0 \Rightarrow f_n(x) \underset{[-1,1]}{\rightrightarrows} 0$ olduğu anlaşılır.

(e) $x = 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ olduğu açıktır. $x \in (0,+\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{3/4}}{e^{\sqrt{nx}}} = \frac{3}{2}x^{3/2}. \lim\limits_{\to\infty} \frac{1}{n^{3/4} : e^{\sqrt{nx}}} = 0$ olduğuna göre $f_n(x) \to 0, x \in [0,+\infty)$ olduğu anlaşılır. $\rho_n = \sup\{n^{3/4}.xe^{-\sqrt{nx}} : x \in [0,+\infty)\} = 4.e^{-2}.\frac{1}{n^{1/4}} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0 \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows 0, x \in [0,+\infty)$ olduğu anlaşılır. ⋄

(3) Aşagıdakı genel terimleri verilen (f_n) dizilerinin karşılarında yazılı aralıklarda düzgün yakınsak olmadıklarını gösteriniz.

(a) $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x}, \quad E = [1,+\infty);$

(b) $f_n(x) = \arctan\frac{n}{x}, \quad E = (0,+\infty);$

(c) $f_n(x) = \frac{(n+x)^2}{x^2+n^2-nx}, \quad E = (2,+\infty);$

(d) $f_n(x) = e^{-x^2-nx}, \quad E = (0,1);$

(e) $f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}, \quad E = (0,+\infty);$

(f) $f_n(x) = \arctan(\frac{x}{n} - n^2), \quad E = [1,+\infty);$

(g) $f_n(x) = nx^2e^{-(n+1)x^2}, \quad E = [0,1];$

(h) $f_n(x) = \sqrt{n}\sin(x/\sqrt{n}), \quad E = [\pi,+\infty);$

(i) $f_n(x) = n\arctan(x^n), \quad E = [0,1];$

(j) $f_n(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x^n), \quad E = (0,1).$

Çözüm: (a) Her $x \in [1,+\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2} + x} = \frac{0}{x} = 0$$

olduğu, dolayısıyla, $f_n(x) \underset{[1,+\infty)}{\to} 0$ olduğu anlaşılır. $\rho_n = \sup\{\frac{nx^2}{1+n^32x} : x \in [1,+\infty)\}[\frac{nx^2}{1+n^2x}$ fonksiyonu $[1,+\infty)$ aralığında artan olduğundan

$] = +\infty$ olur. Demek ki, (f_n)dizisi $E = [1, +\infty)$ üzerinde $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

(b) Her $x \in (0, +\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan\frac{n}{x} = \frac{\pi}{2}$ olur. $\rho_n = \sup\{| \arctan\frac{n}{x} - \frac{\pi}{2} |: x \in (0, +\infty)\} = \sup\{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{n}{x} : x \in (0, +\infty)\}$ $[\frac{\pi}{2} - \arctan nx$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ aralığında artan olduğundan $] = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \frac{\pi}{2} \neq 0 \Rightarrow (f_n)$ dizisi $(0, +\infty)$ üzerinde $f(x) = \frac{\pi}{2}$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir.

(c) Her $x \in (2, +\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+x)^2}{x^2+n^2-nx} = 1$ olduğu açıktır. $\rho_n = \sup\{| \frac{(n+x)^2}{x^2+n^2-nx} |: x \in (2, +\infty)\} = 3 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 3 \neq 0 \Rightarrow (f_n)$ dizisi $(2, +\infty)$ aralığında $f(x) = 1$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir.

(d) Her $x \in (0, 1)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-x^2-nx} = e^{-x^2}.\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{e^{nx}} = e^{-x^2}.0 = 0$ olur. $\rho_n = \sup\{e^{-x^2-nx} : x \in (0, 1)\}$ $[e^{-x^2-nx}$ fonksiyonu $(0, 1)$ üzerinde azalan olduğudan $] = e^0 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1 \neq 0 \Rightarrow (f_n)$ dizisi $(0, 1)$ üzerinde $f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir.

(e) $\lim\limits_{t\to 0^+} t.\ln t = 0$ olduğuna göre, $\forall x \in (0, +\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n}.\ln\frac{x}{n} = 0$ olur. $\rho_n = \sup \mid \frac{x}{n} \ln xn \mid: x \in (0, +\infty) = +\infty$ olduğuna göre, (f_n) dizisi $(0, +\infty)$ aralığında $f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir.

(f) $\forall x \in (1, +\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan(\frac{x}{n} - n^2) = -\frac{\pi}{2}$ olur. $\rho_n = \sup\{| \arctan(\frac{x}{n} - n^2) + \frac{\pi}{2} |: x \in (1, +\infty)\} = \sup\{\arctan(\frac{x}{n} - n^2) + \frac{\pi}{2} : x \in (1, +\infty)\}[\arctan(\frac{x}{n} - n^2)]$ fonksiyonu $(1, +\infty)$ olduğunda artan olduğundan$] = \pi \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \pi \neq 0 \Rightarrow (f_n)$ dizisi $(0, +\infty)$ aralığında $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir.

(g) $x = 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ olduğu açıktır. $x \in (0, 1]$ için
$\lim\limits_{n\to\infty} nx^2e^{-(n+1)x^2} = x^2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{e^{(n+1)x^2}} = 0$ olduğu bulunur.
$\rho_n = \sup\{nx^2e^{-(n+1)x^2} : x \in [0, 1]\} = \frac{1}{e}.\frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow (f_n)$ dizisi $[0, 1]$ aralığında $f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir.

(h) Her $x \in [\pi, +\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\sin(x/\sqrt{n}) = x.\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(x/\sqrt{n})}{x/\sqrt{n}} = x$ olduğu bulunur. $\rho_n = \sup\{|\ \sqrt{n}\sin(\frac{c}{\sqrt{n}}) - x\ |: x \in [\pi, +\infty)\} = \sup\{x - \sqrt{n}.\sin(\frac{x}{\sqrt{n}}) : x \in [\pi, +\infty)\} = +\infty$ oduğuna göre, (f_n) dizisi $[\pi, +\infty)$ aralığında $f(x) = x$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olup düzğün yakınsak değildir.

(i) $x = 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ olduğu açıktır. $t \to 0$ ıken $\arctan t \sim t$ olduğuna göre $\forall x \in (0, 1)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} n\arctan(x^n) = \lim\limits_{n\to\infty} n.x^n = 0$ olduğu bulunur. $\rho_n = \sup\{n\arctan(x^n) : x \in [0, 1)\} = \frac{\pi n}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = +\infty \underset{0}{\not\Longrightarrow} (f_n)$ dizisi $[0, 1)$ aralığında $f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir.

(j) $\forall x \in (0, 1)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{\pi}{2}x^n) = 1$ bulunur. $\rho_n = \sup\{|\cos(\frac{\pi}{2}x^n) - 1 |: x \in (0, 1)\} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1 \neq 0 \Rightarrow (f_n)$ dizisi (0,1) aralığında $f(x) = 1$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir. $\diamond$

(4) Genel terimleri verilen (f_n) dizilerinin karşılarında yazılı aralıklarda

a) Noktasal yakınsak;

b) Düzgün yakınsak yapan α sayılarını bulunuz.

(a) $f(x) = \frac{n^\alpha x}{x^2+n^2}$, $\quad E = (0, +\infty)$;

(b) $f(x) = n^\alpha \arctan(\frac{1}{x^n})$, $\quad E = (0, 1)$;

(c) $f(x) = n^\alpha \ln(1 + \frac{1}{nx})$, $\quad E = (0, +\infty)$;

(d) $f(x) = n^\alpha(\sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x})$, $\quad E = [0, +\infty)$.

Çözüm: (a) $\quad \forall x \in (0, +\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha x}{x^2 + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n^{2-\alpha}(1 + \frac{x^2}{n^2})} = \begin{cases} 0, & \alpha < 2 \text{ ise,} \\ x, & \alpha = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu elde edilir. $\alpha < 2$ için $f(x) = 0$, $\alpha = 2$ için $f(x) = x$ dersek $f_n \underset{(0,+\infty)}{\longrightarrow} f$ olduğu anlaşılır.

$\alpha = 2$ olsun. Bu durumda, $\rho_n = \sup\{| f_n(x) - f(x) |: x \in (0,+\infty)\} = \sup\{| \frac{n^2x^2}{x^2+n^2} - x |: x \in (0,+\infty)\} = \sup\{\frac{x^3}{x^2+n^2} : x \in (0,+\infty)\} = +\infty$ olduğundan (f_n) dizisi $(0,+\infty)$ aralığında $f(x) = x$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

$\alpha < 2$ olsun. Bu durumda, $\rho_n \sup\{\frac{n^\alpha x}{x^2+n^2} : x \in (0,+\infty)\} = \frac{1}{2n^{1-\alpha}} \Longrightarrow$ $\alpha < 2$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$ olduğuna göre $\alpha < 2$ için (f_n) dizisi $(0,+\infty)$ aralığında $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

(b) $\forall x \in (0,1)$ için $0 < \arctan 1/x^n < \frac{\pi}{2}$ olduğuna göre, $x \in (0,1)$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & \alpha < 0 \text{ ise,} \\ \frac{\pi}{2}, & \alpha = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$f_n \underset{(0,1)}{\longrightarrow} f$ olduğu elde edilir.

$\alpha < 0$ için $\rho_n = \sup\{n^\alpha \arctan(\frac{1}{x^n}) : x \in (0,1)\} = \frac{\pi}{2} n^\alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0 \Rightarrow \alpha < 0$ için $f_n(x) \rightrightarrows 0, x \in (0,1)$ olduğu anlaşılır.

$\alpha = 0$ için $\rho_n = \sup\{| \arctan(1/x^n) - \frac{\pi}{2} | \; x \in (0,1)\} = \sup\{\frac{\pi}{2} - \arctan(1/x^n) : x \in (0,1)\} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \frac{\pi}{2} \neq o \Rightarrow f_n(x) \not\rightrightarrows \frac{\pi}{2}, x \in (0,1)$ olduğu elde edilir.

(c) $t \to 0$ iken $\ln(1+t) \sim t$ olduğuna göre, her $x \in (0,+\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \ln(1 + \frac{1}{nx}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}.x} = f(x) = \begin{cases} 0, & \alpha < 1 \text{ ise,} \\ 1/x, & \alpha = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n \underset{(0,+\infty)}{\longrightarrow} f$ olduğu anlaşılır. $\alpha < 1$ için $\rho_n = \sup\{n^\alpha \ln(1 + \frac{1}{nx}) : x \in (0,+\infty)\} = +\infty \Rightarrow f_n(x) \not\rightrightarrows 0, x \in (0,+\infty)$ olduğu görülür. $\alpha = 1$ için $\rho_n = \sup\{n \ln(1 + \frac{1}{nx}) - \frac{1}{x} : x \in (0,+\infty)\}[x. \ln(1 + \frac{1}{nx}) - \frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,+\infty)$ üzerinde artan olduğundan $] = +\infty$ olduğuna göre $\alpha = 1$ için $f_n(x) \not\rightrightarrows 1/x, x \in (0,+\infty)$ olduğu anlaşılır.

(d) $\forall x \in (0,+\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha (\sqrt{(x + \frac{1}{4}} - \sqrt{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}}$$

$$= f(x) = \begin{cases} 0, & \alpha < 1 \text{ ise}, \\ \frac{1}{2.\sqrt{x}}, & \alpha = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n(x) \to f(x), x \in (0, +\infty)$ olduğu elde edilir.

$\alpha < 1$ olsun. Bu durumda, $\rho_n = \sup\{\frac{n^{\alpha-1}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} : x \in (0, +\infty)\} = n^{\alpha-1/2} \Rightarrow \alpha < 1/2$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0 \Rightarrow \alpha < 1/2$ için $f_n(x) \rightrightarrows 0 x \in (0, +\infty)$ olduğu ve $1/2 \le \alpha < 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \begin{cases} 1, & \alpha = 1/2 \text{ ise}, \\ +\infty, & 1/2 < \alpha < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$\neq 0$ olduğuna göre $1/2 \le \alpha < 1$ için $f_n(x) \not\rightrightarrows 0, x \in (0, +\infty)$ olduğu anlaşılır.

$\alpha = 1$ durumunda $f_n(x) \not\rightrightarrows \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$ olduğu örnek 9.1.11(e) de gösterilmiştir. ⋄

(5) $f, [a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı reel değerli herhangi bir fonksiyon ve $f_n(x) = \frac{[\![nf(x)]\!]}{n}, n = 1, 2, \cdots$ olsun. $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall t \in \mathbb{R}$ sayısı için $0 \le (t) < 1$ olmak üzere $t = [\![t]\!] + (t)$ olduğuna göre, $\forall x \in [a, b]$ ve $\forall n \in \mathbf{N}$ için $nf(x) = [\![nf(x)]\!] + (nf(x))$ yazabılırız. Buna göre, $\forall x \in [a, b]$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = f(x) - \frac{(nf(x))}{n}$ yazılabılır. Buna göre, $\rho = \sup\{| f_n(x) - f(x) | : x \in [a, b]\} = \sup\{| \frac{nf(x)}{n} | : x \in [a, b]\} \le 1/n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0 \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a, b]$ olduğu elde edilir. ⋄

(6) $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) üzerinde süreklı türevlnebılır (yani $f'(x) \in C(a, b)$ dır) ve $a < \alpha < \beta < b$ olmak üzere $x \in (\alpha, \beta)$ için $f_n(x) = n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)], n = 1, 2 \cdots$ olsun $f_n(x) \rightrightarrows f'(x), x \in (\alpha, \beta)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f, [a, b]$ üzerinde türevlenebılır olduğundan, $\forall x \in [a, b]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n} = f'(x)$ olur. Lagrange ortalama değer teoremi gereğince $x \in (\alpha, \beta)$ için $0 < \theta_n(x) < 1$ olmak üzere $f(x+\frac{1}{n})-f(x)=\frac{1}{n}f'(x+\frac{\theta_n(x)}{n})\Rightarrow\mid f'(x)-n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))\mid$ $=\mid f'(x)-f'(x+\frac{\theta_n(x)}{n}\mid$ yazılır. f' fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ üzerinde düzgün süreklı olduğundan dolayı $\forall\epsilon>0\exists\delta_0=\delta_0(\epsilon)>0$öyleki $\frac{\theta(x)_n}{n}<\delta_0$ olacak şekılde her $x\in[\alpha,\beta]$ için $\mid f'(x)-f'(x+\frac{\theta_n(x)}{n})\mid<\epsilon$ olur. Öte yandan $\forall x\in[\alpha,\beta]$ için $0<\theta_n(x)<1$ olduğuna göre $\frac{\theta_n(x)}{n}<\delta_0$ eşıtsızlığı yeterı kadar büyük n'ler için sağlandığından $\forall\epsilon>0$ için $\exists n_0=n_0(\epsilon)\in\mathbb{N}$ öğle kı $\forall x\in[\alpha\beta]$ ve $\forall n\geq n_0$ için $\mid f'(x)-f'(x+\frac{\theta_n(x)}{n})\mid<\epsilon$ kalacaktır. Buradan da $f_n(x)\rightrightarrows f'(x),x\in[\alpha,\beta]$ olduğu açıktır. $\diamond$

(7) Terimleri $f_n:[0,1]\to\mathbb{R},f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx},\ n=1,2,3,\cdots$ şeklinde tanımlanan (f_n) fonksiyon dizisi verilmiş olsun. (f_n) dizisinin

(a) $[0,1]$ aralığında noktasal yakınsak ,

(b) $[0,1]$ aralığında düzgün yakısak ve

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx=\int\limits_0^1[\lim f_n(x)]dx$ olması için α nasıl olmalıdır.

Çözüm: (a) $x=0$ için $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=0$ olduğu açıktır. $x\in(0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha xe^{-nx}=x\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{e^{nx}}=0$, olduğundan $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için $f_n(x)\to f(x)=0,x\in[0,1]$ olduğu elde edilir.
(b) $\rho_n=\sup\{\mid f_n(x)-f(x)\mid: x\in[0,1]\}=\frac{1}{e}n^{\alpha-1}\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n=\begin{cases}0, & \alpha<1 \text{ ise,}\\ \frac{1}{e}, & \alpha=1 \text{ ise,}\\ +\infty, & \alpha>1 \text{ ise}\end{cases}$$

$\Rightarrow\alpha<1$ için $f_n(x)\rightrightarrows f(x)=0,x\in[0,1]$ olduğu elde edilir.
(c) $\forall\alpha$ için $\int\limits_0^1[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]dx=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1 0dx=0$ olduğu görülür.
$\int\limits_0^1 f_n(x)dx=\int\limits_0^1 x^\alpha xe^{-nx}dx=[\frac{1}{n^2}-e^{-n}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n})]n^\alpha$ eşitliğinden
$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx=0$ olması için $\alpha<2$ olması gerekir. Demek ki, c) de sözü geçen eşitliğin sağlanması için $\alpha<2$ olması gerekir. $\diamond$

(8) Terimleri $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = nx(1-x)^n, n = 1,2,3,..$ şeklinde tanımlanan (f_n) dizisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olmadığını, fakat $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 [\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)]dx$ eşıtlığının sağlandığını gösteriniz.

Çözüm: $f_n(x) \to f(x) = 0,\ x \in [0,1]$ olduğu açıktır. $\rho_n = \sup\{nx(1-x)^n : x \in [0,1]\} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \frac{1}{e} \neq 0$ olduğuna göre $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x) = 0, x \in [0,1]$ olur.

Öte yandan $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} n. \int\limits_0^1 x(1-x)^n dx$ $[1 - x = t$ denirse $x = 0$ için $t = 1, x = 1$ için $t = 0$ ve $dx = -dt$ olduğundan$]=$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 n(1-t)t^n dt = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0$ ve $\int\limits_0^1 [\lim f_n(x)]dx = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 0.dx = 0$ olduğuna göre istenen eşitliğin doğru olduğu görülür. ◇

(9) Herbir $n \in \mathbf{N}$ için f_n, $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi $[a,b]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. Bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{f_n(x) : x \in [a,b]\} = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ eşitsizliği doğrumudur?

Çözüm: Hayır. Örneğin terimleri $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, f_n(x) = e^{-(x-n)2}, n = 1, 2, \cdots$ şeklinde tanımlanan (f_n) fonksiyon dizisi için $f_n(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde sınırlıdır ($\forall x \in [a,b]$için $f_n(x) \leq 1$ dır) ve $f_n(x) \to f(x) = 0, x \in [a,b]$ dir. $\rho_n = \sup\{e^{-(x-n)^2} : x \in [a,b]\} = e^{-(b-n)^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0 \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows f(x) = 0, x \in [a,b]$ olduğu anlaşılır. Bu dizi için $\sup\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}\} = e^{-(n-n)^2} = 1$ ve $\sup\{f(x) :\in \mathbb{R}\} = 0$ olduğuna göre problemde sözü geçen eşitlik sağlanmaz. ◇

(10) Düzgün yakınsaklık tanımına dayanarak aşağıdakı serilerın karşılarında yazılı aralıklarda düzgün yakınsak olduklarını gösteriniz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n, \qquad E = [-a, a] \ \ (0 < a < 1);$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, \qquad E = [0, 1 + \infty);$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\sqrt{1+nx^2}}$, $\qquad E = [0, 2]$.

Çözüm: (a) $\quad x \in [-a, a]$ $(0 < 0 < 1)$. için $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$, $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x}{1-x}$ ve $r(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ dır. $\forall x \in [-a, a]$ için $1 - x \geq 1 - a \Rightarrow r_n(x) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} \Rightarrow r_n(x) \rightrightarrows 0, x \in [-a, a]$ ise seri $[-a, a]$ aralığında düzgün yakınsaktır.
(b) $\quad x \in [0, +\infty)$ için , $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}$, $S_(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{x+1}$ ve $r_n(x) = S_(x) - S_n(x) = \frac{1}{x+n+1}$ dır. $\forall x \in [0, +\infty)$ için $x + n + 1 \geq n + 1 \Rightarrow r_n(x) \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow r_n(x) \rightrightarrows 0, x \in [0, +\infty) \Rightarrow$ seri $[0, +\infty)$ aralığında düzün yakınsaktır.
(c) $\quad x \in [0, 2]$ için $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x}{3^k\sqrt{1+kx^2}}$ $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{3^n\sqrt{1+nx^2}}$, $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ olmak üzere $| \, r_n(x) \, | = | \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{x}{3^k\sqrt{1+kx^2}} | \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^n} \Rightarrow$ $r_n(x) \rightrightarrows 0, x \in [0, 2] \Rightarrow$ seri $[0, 2]$ aralığında düzgün yakınsaktır. $\diamond$

(11) Aşağıdaki serilerin noktasal yakınsak ve mutlak yakınsak olduğu aralıkları bulunuz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$; $\qquad$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2}$; $\qquad$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{ln^n(x+2)}$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}(\frac{x+2}{2x+1})^n$; $\qquad$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n(n+1)}$;

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$; $\qquad$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2})^n(e^{e^{x/n}-1})^n$;

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{x^2}{n} + x)^n$; $\qquad$ (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + x^2})$;

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x^2+1)(x^2+2)\cdots(x^2+n)}$;

Çözüm: (a) $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ serisinin $| \, q \, | < 1$ için mutlak yakınsak ve $| \, q \, | \geq 1$ için ıraksak olduğunu biliyoruz. Demek ki verilen seri $| \, \frac{1}{x} \, | \geq 1$, yani $| \, x \, | \leq 1$ için ıraksak $| \, \frac{1}{x} \, | < 1$, için yani $| \, x \, | > 1$ için mutlak yakınsaktır.

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} = \lim_{n\to\infty} e^{-x} = e^{-x}$ olduğuna göre verilen seri $e^{-x} < 1$için yani $x \in (0, +\infty)$ için mutlak yakınsak $e^{-x} > 1$ için , yani $x \in (-\infty, 0)$ için ıraksaktır. x=0 için bu serinin ıraksak olduğu açıktır.
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n^2}$ serisi (Cauchy kök tespitinden) $\mid q \mid < 1$ için mutlak yakınsak , $\mid q \mid > 1$ için yakınsak ve $\mid q \mid = 1$ için $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğuna göre) mutlak yakınsaktır. Demek ki, verilen seri $\mid \ln x \mid \leq 1$ için yenı $[\frac{1}{e}, e]$ aralığında mutlak yakınsak $\mid \ln x \mid > 1$ için yani $(-\infty, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$ üzerinde ıraksaktır.
(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid \frac{n}{\ln^n (x+2)} \mid} = \frac{1}{|\ln (x+2)|} \Rightarrow$ verilen seri $x{+}2 > 0$ ve $\mid \ln (x+2) \mid > 1$ için yani $(-2, -2+\frac{1}{e})$ ve $(e-2, +\infty)$ aralıkları üzerinde mutlak yakınsak, $x+2 > 0,\ x+2 \neq 1$ ve $\mid \ln (x+2) \mid < 1$için yani $(-2+\frac{1}{e}, -1)$ ve $(-1, e-2)$ aralıları üzerinde ıraksaktır. $x = e-2$ ve $x = -2+\frac{1}{e}$ için verilen serinın ıraksak olduğu açıktır.
(e) $a_n(x) = \frac{n}{n^2+4}(\frac{x+2}{2x+1})^n$ olsun. $x \neq \frac{-1}{2}, x \neq -2$ için $\mid \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \mid = \frac{(n+1)(n^2+4)}{n(n^2+2n+5)} \mid \frac{x+2}{2x+1} \mid \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mid \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \mid = \mid \frac{x+2}{2x+1} \mid \Rightarrow$ verilen seri $x \neq \frac{-1}{2}, x \neq -2$ ve $\mid \frac{x+2}{2x+1} \mid < 1$ için yani $(-\infty, -1)$ ve $(1, +\infty)$ aralıklarında mutlak yakınsak, $x \neq \frac{-1}{2}, x \neq -2$ ve $\mid \frac{x+2}{2x+1} \mid > 1$ için yani $(-1, -1/2)$ ve $(-1/2, 1)$ aralıkları üzerinde ıraksaktır.
(f) $a_n(x) = \frac{2^n \sin^n x}{n(n+1)}$ olsun. x=0 için $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)$ serisinin yakısak olduğu açıktır. $x \neq 0$ için $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid a_n(x) \mid} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n(n+1)}} \mid \sin x \mid = 2 \mid \sin x \mid$ ise verilen seri $2 \mid \sin x \mid < 1$ için yani $(-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi), k \in \mathbf{Z}$ aralıkları üzerinde mutlak yakınsak $(\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{5\pi}{6}+k\pi), k \in \mathbf{Z}$ aralıkları üzerinde ıraksaktır. $2 \mid \sin x \mid = 1$ için yani $x = (-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi, x = (-1)^{k-1}\frac{\pi}{6}+k\pi, k \in \mathbf{Z}$ noktalarında verilen seri mutlak yakınsaktır $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ yakınsak olduğundan).
(g) Her $x \in \mathbb{R}$ için $(\frac{1}{x^2+\sqrt{n}})$ dizisi monoton azalan ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{n}} = 0$ olduğuna göre, Leibnitz testinden verilen seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır. Her $x \in \mathbb{R}$ için $\mid \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}} \mid = \frac{1}{x^2+\sqrt{n}}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{n}}$ serisı her $x \in \mathbb{R}$ için ırak-

sak olduğundan bu seri $\mathbb{R}$ üzerinde koşullu yakınsaktır.
(h) Her $\in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^n \mid e^{x/n}-1\mid^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2} \mid e^{x/n}-1 \mid = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{2} \mid \frac{e^{x/n}-1}{x/n} \mid = \frac{|x|}{2}$ ise Cauchy Kök testinden, verilen seri $\mid x \mid < 2$ için yani (-2,2) aralığında mutlak yakınsak $\mid x \mid > 2$ için yani $(-\infty,-2)$ ve $(2,+\infty)$ aralıklar üzerinde ıraksaktır. x=2 için $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{2}{n}}-1)^n$ serisı $[n\to\infty$ ıken $(e^{\frac{2}{n}}-1)^n \sim (\frac{2}{n})^n$ ve Couchy Kök testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n})^n$ serisi yakınsak olduğuna göre] yakınsaktır. $x=-2$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{-2/n}-1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1-e^{-2/n})$ serisi $[(1-e^{-2/n})$ dizisi monoton ve $\lim\limits_{n\to\infty}(1-e^{-2/n}) = 0$ olduğuna göre] Leıbnıtz testinden yakısaktır. Demek kı, verilen seri $(-2,2)$ aralığında mutlak yakınsak, x=-2 noktasında koşullu yakınsak $(\infty,-2)$ ve $[2,+\infty)$ aralığında ıraksaktır.
(i) Her $x\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid (\frac{x^2}{n}+x)^n \mid} = \lim\limits_{n\to\infty} \mid \frac{x^2}{n}+x \mid = \mid x \mid$ olduğuna göre, Cauchy testinden, verilen seri $|x|<1$ için, yani (-1,1) araşığında mutlak yakınsak, $\mid x \mid > 1$ için yani $(-\infty,-1)$ ve $(1,+\infty)$ aralıklarında ıraksaktır. x =-1 ve x=1 için sırasıyla $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{1}{n}^n)^n$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ serilerı ıraksaktırlar (sırasıyla $\lim(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} \neq 0$ ve $\lim(1+\frac{1}{n})^n = e \neq 0$ olduğundan).
(j) $\forall x\in\mathbb{R}$ için $a_n(x) = \sin(\pi\sqrt{n^2+x^2}) = (-1)^n \sin\pi(\sqrt{n^2+x^2}-n) = (-1)^n \sin\frac{\pi x^2}{\sqrt{n^2+x^2}+n}$ oduğu açıktır. Her $x\in\mathbb{R}$ için $(\frac{\pi x^2}{\sqrt{n^2+x^2}+n})$ dizisi azalan ve limitı sıfır olan bir dızı olduğundan $(\sin\frac{\pi x^2}{\sqrt{n^2+x^2}+n})$ dizisi de her $x\in\mathbb{R}$ için aynı özellıklere sahıptır. O halde, Leibnitz testinden verilen seri her $x\in\mathbb{R}$ için koşullu yakınsaktır.
(k) $a_n(x) = \frac{n!}{(x^2+1)(x^2+2)\cdots(x^2+n)}$ olmak üzere $\forall x\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n(x)}{a_{n+1}(x)}-1) = \lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{x^2+n+1}{n+1}-1) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}x^2 = x^2 \Rightarrow$ Raabe testinden verilen seri $\mid x^2 \mid > 1$ için, yani $\mid x \mid > 1$ için mutlak yakınsak ,$\mid x^2 \mid < 1$ için yani $\mid x \mid < 1$ için ıraksaktır. $\mid x \mid = 1$ için yani $x=\pm 1$ noktasında elde edilen $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ serisi ıraksak olduğuna göre verilen seri $(-\infty,-1)$ ve $(1,+\infty)$

aralıklarında mutlak yakınsak $[-1,1]$ aralığında ise ıraksaktır. $\diamond$

(12) Weierstrass testinden yararlanarak aşağıdakı serilerın karşılarında yazılı aralılarda düzgün yakısak olduklarını gösteriniz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}),\qquad E = [-2,-1/2] \cup [1/2, 2];$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}},\qquad E = (-\infty, +\infty);$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4+x^2} \ln \frac{n^2+x^2}{n^4+x^4},\qquad E = (-\infty, +\infty);$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{x \ln^2 n}),\qquad E = [0, a]\ (a > 0);$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n(x^2+\sin x)},\qquad E = [1, +\infty).$

Çözüm: (a) $\sup\{x^n + x^{-n} : \frac{1}{2} \leq\mid x \mid\leq 2\} = 2^n + \frac{1}{2^n} < 2^{n+1}$ olduğu açıktır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$ majorant serisı Dalembert testinden yakınsak oduğuna göre verilen seri E üzerinde düzgün yakınsaktır.
(b) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ için $|\sin\alpha| \leq 1$ olduğuna göre $\mid a_n(x) \mid=\mid \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \mid\leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} < \frac{1}{n^{4/3}}$ olduğu elde edilir. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p = 4/3 > 1$ serisı yakınsak olduğundan Weıerstrass testinden verilen seri E üzerinde düzgün yakınsaktır.
(c) $a_n(x) = \frac{x}{n^4+x^2} \ln \frac{(n^2+x^2)^2}{n^4+x^4}$ olsun her $\alpha > 0$ için $\ln(1+\alpha) \leq \alpha$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $2 \mid ab \mid\leq a^2 + b^2$ olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\ln \frac{(n^2+x^2)^2}{n^4+x^4} = \ln(1 + \frac{2n^2x^2}{n^4+x^2}) \leq \frac{2n^2x^2}{n^4+x^4} \leq 1$ olduğu elde edilir. $\sup\{\mid \frac{x}{n^4+x^2} \mid: x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{2n^2} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ için $\mid \frac{x}{n^4+x^2} \mid\leq \frac{1}{2n^2}$ olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\mid a_n(x) \mid\leq \frac{1}{2n^2}$ olduğuna göre ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ majorant serisi yakınsak olduğundan Weierstrass testinden verilen seri E üzerinde düzgün yakınsaktır.
(d) $\forall\alpha > 0$ için $\ln(1+\alpha) \leq \alpha$ olduğuna göre $\forall x \in [0, a](a > 0)$ için $0 \leq \ln(1+\frac{x^2}{n \ln^2 n}) \leq \frac{x^2}{n \ln^2 n} \leq \frac{a^2}{n \ln^2 n}$ olur. Ayrıca $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n \ln^2 n}$ majorant serisı yakınsak olduğuna göre verilen seri E üzerinde düzgün yakınsaktır.
(e) $\varphi(x) = x^2 + \sin x$ olsun $\forall x \in [1, +\infty)$ için $\varphi'(x) = 2x + \cos x > 0$

olduğuna göre $\varphi(x)$ fonksiyonu $[1,+\infty)$ üzerinde artan, dolayısıyla her $x \in [1,+\infty)$ için $0 \le e^{-n(x^2+\sin x)} \le e^{-n\varphi(1)}, \varphi(1) = 1+\sin 1 > 0$ olduğu elde edilir. $p=\varphi(1)>0$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-pn}$ majorant serisı yakınsak olduğuna göre verilen seri E üzerinde düzgün yakınsaktır. $\diamond$

(13) Genel terimleri aşağıda verilen serilerın karşılarında yazılı aralıklarda düzgün yakınsak olduklarını gösteriniz.

(a) $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{n}}(n \in \mathbf{N}), \quad E=[0,+\infty);$

(b) $u_n(x) = \frac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}(n \in \mathbf{N}), \quad E=(-\infty,+\infty);$

(c) $u_n(x) = \frac{\sin x \cos x}{\ln(n+x^2)}(n \in \mathbf{N}, n \le 2), \quad E=(-\infty,+\infty);$

(d) $u_n(x) = \frac{(-1)^{[[\sqrt{n}]]}}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad E=[0,+\infty).$

Çözüm: (a) $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, a_n(x) = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{n}}}$ olmak üzere $u_n(x) = a_n(x).b_n$, $n \in \mathbb{N}$ olur. $\sum\limits_{n-1}^{\infty} b_n$ serisı yakınsak (Leibnitz testinden) ve (a_nx) dizisi $[0,+\infty)$ üzerinde monoton ve düzgün sınırlı ($\forall x \in [0,+\infty)$ ve $\forall n \in \mathbf{N}$ için $0 < a_n(x) \le 1$ dır) olduğuna göre, Abel testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{n}}$ serisı E üzerinde düzgün yakınsaktır.
(b) $b_n = \frac{1}{1+n^2}, a_n(x) = e^{-n^2x^2}$ olmak üzere $u_n(x) = a_n(x)b_n, n \in \mathbb{N}$ olur. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ serisı yakınsak ve $(a_n(x))$ dizisi $[0,+\infty)$ üzerinde monoton ve düzgün sınırlı ($\forall x \in [b,+\infty)$ ve $\forall n \in N$ için $0 \le a_n(x) \le 1$ dır) olduğuna göre verilen seri $(0,+\infty)$ aralığında düzgün yakınsaktır. Bu serinin $(-\infty,0]$ aralığında da düzgün yakısak olduğu benzer şekilde gösterılır. Demek ki, verilen seri $E=\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
(c) $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in N$ için $\left| \sum\limits_{k=2}^{n} b_k(x) \right| = \left| \sum\limits_{k=2}^{n} \sin x \cos kx \right| \le \left| \sin x \cos x \right| + \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x \cos kx \right| \le 1 + 2 \left| \cos\frac{x}{2} \right| \left| \sin(n+\frac{1}{2})x \right| \le 3$ ve $(a_n(x) = \frac{1}{\ln(n+x^2)},\ n \in \mathbb{N})$ dizisi $[0,+\infty)$ üzerinde azalan ve $a_n(x) \rightrightarrows 0, x \in [0,+\infty)$ (Çünkü $\forall x \in [0,+\infty)$ için $n \to \infty$ ıken $0 < a_n(x) \le \frac{1}{\ln n} \to 0$

olur) olduğundan Dirichlet testinden verilen seri $[0,+\infty)$ aralığında ve hem de $E=(-\infty,+\infty)$ aralığında düzgün yakınsaktır.
(d) $a_n(x)=(1+\frac{x}{n})^{-1/2}, b_n=\frac{(-1)^{[[\sqrt{n}[[}}{n}$ olmak üzere $u_(x)=a_n(x)b_n, n\in \mathbb{N}$ dır. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sersı yakınsak ve $(a_n(x))$ dizisi her $x\in[0,+\infty)$ için monoton ve düzgün sınırlı olduğuna göre ($\forall x\in[0,+\infty)$ ve $hern\in\mathbb{N}$ için $0<a_n(x)\leq 1$ dır) Abel testinden verilen seri $E=[0,+\infty)$ aralığında düzgün yakınsaktır. $\diamond$

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ serisi E üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \mid u_n(x)\mid$ serisi E üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: Genel olarak bu sorunun cevabı hayırdır. Örneğın, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ serisi $[0,1]$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olmasına rağmen $\sum_{n=0}^{\infty}\mid(-1)^n(1-x)x^n\mid=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ serisı $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. Bunu görelım. $(1-x)x^n\to 0, x\in[0,1]$ ve $\rho_n=\sup\{(1-x)x^n : x\in[0,1]\}=\frac{1}{n+1}(\frac{n}{n+1})^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\rho_n=0$ olduğundan, $a_n(x)=(1-x)x^n, n\in\mathbf{N}$ dizisi $[0,1]$ üzerinde sıfıra düzgün yakınsaktır. Bu dizinin n'ye göre monoton olduğu açıktır. Buna göre Dirichlet testinden $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır. $[0,1]$ üzerinde hemde mutlak yakınsaktır. Gerçekten, $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)x^k, x\in[0,1]$ denırse, her $n=1,2,..$ için $S_n(1)=0$ ve $x\in[0,1)$ için $S_n(x)=1-x^n$ olduğundan

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x<1 \text{ ise,}\\ 0, & x=1 \text{ ise}\end{cases}$$

elde edilir. Her $n=1,2,\cdots$ için $\rho_n=\sup\{\mid S_n(x)-S(x)\mid : x\in[0,1]\}=1$ ve buradan da $\lim_{n\to\infty}g_n=1\neq 0$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ serisı $[0,1]$ aralığında noktasal yakınsak olup düzgün yakınsak değildir.$\diamond$

(15) $\mathbb{R}$ içinde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ olacak şekilde bir (a_n) dizisi için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ serisi yakınsak olsun $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x-a_n}$ serisının $a_n, n = 1, 2\cdots$ noktalarını ihtiva etmeyen herhangı kapalı ve sınırlı bir E aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \notin E$ olacak şekilde kapalı ve sınırlı bir $E \subset \mathbb{R}$ aralığı verılsın. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \forall\epsilon > 0$ sabıt sayısı için $\forall x \in E$ ve $\forall n \geq n_\epsilon$ için $| x - a_n | \geq \epsilon$ olacak şekılde bir $n_\epsilon \in \mathbf{N}$ sayısı vardır. $M = \sup\{| x |: x \in E\}$ olmak üzere $\forall n \geq n_\epsilon$ için $\frac{1}{|x-a_n|} = \frac{1}{|a_n|}\frac{1}{|\frac{x}{a_n}-1|} \leq \frac{1}{|a_n|}\frac{1}{1-\frac{M}{|a_n|}}$ olduğu açıktır. $n \to \infty$ ıken $\frac{1}{|a_n|}\frac{1}{|\frac{M}{|a_n|}-1|} \sim \frac{1}{|a_n|}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ yakınsak olduğuna göre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n||\frac{M}{|a_n|}-1|}$ serisı yakınsaktır. Weıerstrass testı gereğınce buradan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x-a_n}$ serisının E üzerinde düzgün yakınsak olduğu anlışılır. $\diamond$

(16) $d_n \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \cdots$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ serisi yakınsak olduğunda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^x}$ Dirichlet serisinin $[0, +\infty)$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a_n(x) = \frac{1}{n^x}, b_n = d_n, n \in \mathbf{N}$ olsun. $(a_n(x))$ dizisi düzgün sınırlı ($\forall x \in [0, \infty)$ ve $\forall n = 1, 2, \cdots$ için $0 < a_n(x) \leq 1$ dır.) ve monoton ($\forall x \in [0, +\infty)$ için $\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n+1)^x} > 0$ dır.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ serisı yakınsak olduğundan Abel testı gereyınce $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^x}$ serisı $[0, +\infty)$ aralığında düzgün yakınsaktır. $\diamond$

(17) $f(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ fonksiyonunun $E = (-\infty, +\infty)\backslash\mathbb{Z}$ üzerinde sürekli ve 1 periyotlu bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f_n(x) = \frac{1}{(n-x)^2}, n = 1, 2\cdots$ fonksiyonlarının E üzerinde sürekli oldukları açıktır. Herhangi bir $(a, b) \not\subset E$ aralığı verilen $\alpha =$

$\max\{|\ a\ |, |\ b\ |\}$ olmak üzere ,$n \neq 0, |\ n\ | > \alpha$ için $f_n(x) = (\frac{1}{n})^2 \frac{1}{(1-\frac{x}{n})^2}$ yazılabilir. Her $x \in (a,b)$ için $\frac{1}{(1-\frac{x}{n})^2}$ fonksiyonları sınırlı ($\forall x \in (a,b)$ için $(\frac{1}{1-\frac{x}{n}})^2 \leq \frac{1}{(1-\frac{\alpha}{|n|})^2}$ dır) ve her sabit $x \in (a,b)$ için monotonlardır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğuna göre Abel testinden $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ serisi (a,b) aralığında düzgün yakınsaktır. Her $n \in \mathbf{Z}$ için $f_n(x) \in C(a,b)$ ve $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ serisi (a,b) aralığında düzgün yakınsak olduğundan $f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında süreklıdır. Demek ki, f fonksiyonu tanımlı olduğu bölgede süreklidir. $f(x+1) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-1-x)^2}[n-1 = k$ denirse $] = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k-x)^2} = f(x), x \in E$ olduğuna göre f, 1 periyotlu fonksiyondur. $\diamond$

(18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x})$ serisının $[0,1]$ aralığında yakınsak olup düzgün yakınsak olmadığını, fakat bu serisinin toplam fonksiyonun $[0,1]$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(kxe^{-kx} - x(k-1)e^{-(k-1)x}) = nxe^{-nx}$ ve $x \in [0,1]$ için $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$ olduğu açıktır. Demek ki, verilen seri $[0,1]$ aralığında yakınsak ve toplamı $S(x) = 0$ bu aralıkta süreklı bir fonksiyondur. $\rho_n = \sup\{|\ S_n(x) - S(x)\ | : x \in [0,1]\} = \sup\{nxe^{-nx} : x \in [0,1]\} = \frac{1}{e} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \frac{1}{e} \neq 0$ olduğuna göre $S_n(x) \not\rightrightarrows 0, x \in [0,1]$ dolayısıyla, verilen seri $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak değldır. $\diamond$

(19) Aşağıda verilen fonksiyonların tanım bölgelerini bulunuz ve süreklilik durumlarını inceleyiniz.
(a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ (b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

Çözüm: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\ (x+\frac{1}{n})^n\ |} = \lim\limits_{n\to\infty} |\ x+\frac{1}{n}\ | = |\ x\ | \Rightarrow$ Couchy kök testinden verilen seri $|\ x\ | < 1$ için, yani $(1,1)$ aralığında yakınsak $|\ x\ | \geq 1$ için yani $(-\infty,-1]$ ve $[1,+\infty)$ aralıklarında ıraksaktır. Herhangi bir $a \in (0,1)$ sayısı verildiğinde her $x \in [-a,a]$ için $|\ (x+\frac{1}{n})^n\ | \leq$

$(a+\frac{1}{n})^n, n=1,2,\cdots$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a+\frac{1}{n})^n$ majorant serisı yakınsak olduğuna göre (Couchy Kök testinden) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ serisı $[-a,a]$ aralığında düzgün yakınsaktır. O halde, Teorem 9.3.21 den $f(x)$ fonksiyonu $[-a,a]$ aralığında (-1,1) aralığında süreklı bir fonksiyondur.

(b) $x \neq 0$ için $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x}{(1+x^2)^n} = x\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{x^3}(1-\frac{1}{(1+x^2)^n})$ ve $S_n(0)=0$ olduğundan,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu elde edilir. f fonksiyonunun $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ üzerinde sürekli ve $x=0$ noktasında süreksiz olduğu anlaşılır. $\diamond$

(20) $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ Riemann fonksiyonunun $(1,+\infty)$ aralığında ıstenilen mertebeden sürekli türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x_0 \in (1,+\infty)$ ve $E=[x_0,+\infty)$ olsun. Her $p=0,1,2,..$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}}$ serisı yakınsak ve $\forall x \in E$ ve $\forall n = 1,2,..$ için $\frac{\ln^p n}{n^x} \leq \frac{\ln^p n}{n^{x_0}}$ olduğuna göre Weierstrass testinden her $p=0,1,2,\cdots$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}$ serisı E üzerinde düzgün yakınsaktır. $\forall n \in \mathbf{N}$ için $\frac{1}{n^x}$ fonksiyonu E üzerinde sürekli olduğundan Teorem 9.3.21 gereğınce $\xi(x)$ fonksiyonu E üzerinde süreklıdır. Aynı teoreme göre her $p=0,1,2,\cdots$ için $\xi^{(p)}(x) = (-1)^p\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}$ fonksiyonları da E üzerinde, dolayısıyla, $(1,+\infty)$ aralığında süreklıdır. $\diamond$

(21) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz ve türevlenebilirlik durumunu inceleyiniz.

Çözüm: Herhangi bir $(-M,M)(M>0)$ aralığı verilsin. $\forall x \in (-M,M)$için $\frac{|x|}{n^2+x^2} \leq \frac{M}{n^2}, n=1,2,..$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisı yakınsak oduğuna göre verilen seri Weierstrass testi gereğınce $(-M, M)$ aralığında düzgün yakınsaktır. Demek ki, f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır.

Her $x \in (-M, M)\backslash\{0\}$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$ serisının terım terıme türevlenebılır olduğunu görelım. $f_n(x) = \frac{|x|}{n^2+x^2}, n = 1, 2, \cdots$ olsun. $\forall x \in (-M, M)\backslash\{0\}$ için $f_n'(x) = \frac{n^2 \text{sgn} x - x|x|}{(n^2+x^2)^2}$ ve $\forall n \geq M$ için $| f_n'(x) | \leq \frac{n^2+M^2}{n^4} \leq \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2}$ eşıtsızlığı sağlandığından ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ majorant serisı yakınsak olduğuna göre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ serisı $(-M, M)\backslash\{0\}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ fonksiyonları $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ üzerinde türevlenebılır olduklarından ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ serisı $(-M, M)\backslash\{0\}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan Teorem 9.3.24 gereğınce f fonksiyonu $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ üzerinde türevlenebilirdir.

f foksiyonu $x = 0$ noktasında türevli olmadığını gösterelım. Bunun için sonlu $\lim\limits_{n\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ ve $\lim\limits_{n\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ limitlerının varolmadığını gösterelım. $h \neq 0$ için

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{| h |}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + h^2} \tag{9.76}$$

olduğu açıktır. Weierstrass testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+h^2}$ serisı düzgün yakınsaktır. ($\forall n \in (N)$ için $\frac{1}{n^2+h^2} \leq \frac{1}{n^2}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisı yakınsak olduğundan) o halde Teorem 9.3.19 gereğınce

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + h^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + h^2} < +\infty \tag{9.77}$$

olur. Buna göre (9.77) dikkate alındığında (9.76)'dan $f'(0^+) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $f'(0^-) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ olduğu elde edilir.$f'(0^-) \neq f'(0^+)$ olduğuna göre f fonksiyonu $x = 0$ noktasıda türevlı değildir. $\diamond$

(22) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 1_-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{n+1}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$; (d) $\lim\limits_{x\to \infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$;

Çözüm: (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serisi yakınsak ve $(\frac{x^n}{x^n+1})$ dizisi her $x \in [0,1]$ için monoton ve $[0,1]$ üzerinde düzgün sınırlı olduğundan ($\forall x \in [0,1]$ ve $\forall n = 1, 2, \cdots$ için $\frac{x^n}{x^n+1} \leq 1$ dir) Abel testinden verilen seri $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Üstelik her $n = 1, 2, \cdots$ için $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(-1)^{n-1}}{n} . \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ limiti vardır. Buna göre Teorem 9.3.13 gereğınce $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} . \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2$ bulunur.

(b) $\forall x \in [0, +\infty)$ için $\frac{1}{2^n n^x} \leq \frac{1}{2^n}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisı yakınsak olduğuna göre, Weierstrass testinden verilen seri $[0, +\infty)$ aralığında düzgün yakınsaktır. Üstelik her $n \in \mathbf{N}$ için sonlu $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2^n n^x} = \frac{1}{2^n}$ limiti mevcut olduğundan Teorem 9.3.13 gereğınce $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2^n n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ bulunur.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$ serisi $[0,1]$ üzerinde yakınsak fakat düzgün yakınsak omadığına göre Teorem 9.3.13 uygulanamaz. $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x^k - x^{k+1}) = x(1 - x^n) \Rightarrow$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \text{ ise,} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = 1$ bulunur.

(d) $\sup\{\frac{x^2}{1+n^2x^2} : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{n^2}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisı yakınsak olduğuna göre verilen seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Üstelik her $n \in \mathbf{N}$ için $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n^2}$ limiti mevcut olduğundan Teorem 9.3.13 gereğınce

$\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ bulunur.$\diamond$

(23) Aşağıdaki serilerin karşılarında yazılı aralıklarda terim terime türevlenebilirliğini gösteriniz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n}$, $\mathbb{E}=\mathbb{R}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n}^2$, $\mathbb{E}=\mathbb{R}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^4x^2}$, $\mathbb{E}=\mathbb{R}$;

Çözüm: (a) $\frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n}$ $(n=1,2...)$ fonksiyonlarının $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli türevlenebilir oldukları açıktır.$\forall x\in\mathbb{R}$ için $|\frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n}|\leq\frac{1}{n^2}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$serisi yakınsak olduguna göre Weierstrass testinden verilen seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Türev fonksiyonlarından olusan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\frac{x}{n}$ serisi de $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğuna (Weierstrass testinden) göre Teorem 9.3.24 gereğince verilen seri $\mathbb{R}$üzerinde terim terime türevlenebilirdir.

(b) $\arctan\frac{x}{n^2}(n=1,2,...)$ fonksiyonlarının $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli türevlenebilir oldukları açıktır.$\forall x\in\mathbb{R}$ için $n\to\infty$ iken $|\arctan\frac{x}{n^2}|\sim\frac{|x|}{n^2}$ olduğuna göre verilen seri $\mathbb{R}$ üzerinde yakınsaktır.Türev fonksiyonlarından oluşan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$ serisi Weierstrass testinden $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Buna göre, Teorem 9.3.24 gereğince verilen seri $\mathbb{R}$ üzerinde terim terime türevlenebilirdir.

(c) $\frac{1}{n^3+n^4x^2}(n=1,2,\cdots)$ fonksiyonlarının $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli türevlenebilir oldukları açıktır. $\forall x\in\mathbb{R}$ için $0<\frac{1}{n^3+n^4x^2}\leq\frac{1}{n^3}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ serisi yakınsak olduğundan, Weierstrass testi ğereğince verilen seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Türev fonksiyonlarından oluşan
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-2xn^4}{(n^3+n^4x^2)^2}$ serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğuna göre,
$(\sup\{|\frac{-2xn^4}{(n^3+n^4x^2)^2}|\mid x\in\mathbb{R}\}=\frac{9}{8\sqrt{3}}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ serisi yakınsak olduğundan$)$ Teorem 9.3.24 gereğince verilen seri $\mathbb{R}$ üzerinde terim terime türevlenebilirdir. $\diamond$

(24) Aşağıdaki serilerin karşılarında yazılı aralıklarda terim terime integrallenebilirliğini gösteriniz.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n!}$, $\quad E = [0, \frac{\pi}{2}]$; $\quad$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}})$, $\quad E = [0, 1]$

Çözüm: (a) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $|\frac{\cos^n x}{n!}| \leq \frac{1}{n^2}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ serisi yakınsak olduğuna göre, (D'alembert testinden) verilen seri $[0, 1]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Buna göre, Teorem 9.3.23 gereğince bu seri $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında terim terime integrallenebilrdir ve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

[Örnek 6.4.10 dan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = a_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ tek ise,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olduğuna göre]
$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ eşitliği doğrudur.

(b) Verilen serinin $[0, 1]$ üzerinde yakınsak, fakat bu yakınsamanın düzgün olmadığını gösterelim. $\forall x \in [0, 1]$ için

$$S_n(x) = (\sum_{k=1}^{n} x^{\frac{1}{2k+1}} - x^{\frac{1}{2k-1}}) = -x + x^{\frac{1}{2n+1}} \Rightarrow$$

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ve x} = 1 \text{ ise,} \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu elde edilir. Serinin $S(x)$ toplamı $[0, 1]$ üzerinde süreksiz olduğuna göre, (çünkü $S(0) = 0$ ve $S(0^+) = 1 \neq S(0)$dır) verilen seri $[0, 1]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. Demek ki, bu seriye Teorem 9.3.24

uygulanamaz. Buna rağmen, $\int\limits_0^1 S(x)dx = \frac{1}{2}$ ve

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}})dx &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığına göre verilen seri $[0,1]$ aralığında terim terime integrallenebilirdir. $\diamond$

(25) f, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı,her mertebeden türevlenebilir ve $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ için

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| < \frac{1}{n^2}$$

eşitsizliğini saglansın. Bu durumda c herhangi bir sabit sayı olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = ce^x$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)]$, $x \in \mathbb{R}$ serisini gözönüne alalım. Her $x \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| < \frac{1}{n^2}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğuna göre, Weierstrass testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)]$ serisi $\mathbb{R}$ üzrinde düzgün yakınsaktır. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}[f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)]$, $x \in \mathbb{R}$ olsun. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}[f^{(n+1)}(x) - f^{(n)}(x)]$ serisi de $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğuna göre Teorem 9.3.24 gereğince

$$\sum_{n=1}^{\infty}[f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)]$$

serisi $\mathbb{R}$ üzerinde terim terime türevlenebilirdir ve $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}[f^{(n+1)}(x) - f^{(n)}(x)]$ dir. $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}[f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)] - f^{(1)}(x) + f^{(0)} = S(x) - f^{(1)}(x) + f(x) \Rightarrow [S(x) + f(x)]' = S(x) + f(x)$ olduğu dalayısıyla,c sabit